

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ
ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ----ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$$

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta$$

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

A) Να βρείτε τα αναπτύγματα:

1) $(\chi - 2\psi)^2 =$

2) $(3\alpha + 2\beta)^2 =$

3) $(2\chi + 3)^2 =$

4) $(-2\psi + \chi^3)^2 =$

5) $(\sqrt{5} - 2)^2 =$

6) $(2\chi - \frac{3}{\chi})^2 =$

7) $(5\chi - \psi)(5\chi + \psi) =$

8) $(2\psi - 4\omega)(4\omega + 2\psi) =$

9) $(\alpha^3 - \beta^3)(\alpha^3 + \beta^3) =$

10) $(2\psi + \frac{\chi}{4})(\frac{\chi}{4} - 2\psi) =$

B) 1) Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(2\chi + 1)^2 + (3\chi + 2)(3\chi - 2) =$

β) $(\chi - 2\alpha)^2 - (\chi + \alpha)^2 =$

γ) $(\chi - 1)(\chi^2 + 1)(\chi^4 + 1)(\chi + 1) =$

δ) $(\chi + 1)^2 - \chi(\chi - 2)^2 + 2(2\chi + 3)(3 - 2\chi) =$

2) Να κάνετε τις πράξεις και μετά να βρείτε την αριθμητική τιμή του αποτελέσματος για $\psi = -1$.

$$(2\psi + 1)^2 - 2(1 + 3\psi)(3\psi - 1) - (5 - \psi)^2 =$$

3) Δίνεται το πολυώνυμο $P(\chi) = -2\chi^2 + 2\chi + 80$.

i) Να βρείτε το $P(\chi - 1)$

ii) Να αποδείξετε ότι $P(\chi) - P(\chi - 1) = 4 - 4\chi$

iii) Να υπολογίσετε το $P(100) - P(99)$

4) Αν $\alpha - \beta = 6$ και $\alpha\beta = 3$ να δείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 42$.

5) Αν $2\chi + 3\psi = 8$ και $\chi\psi = 2$ να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $4\chi^2 + 9\psi^2$.

6) Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης

$$A = (3\chi - \psi)^2 - (2\chi + \psi)(2\chi - \psi) - \chi^2 + 10\chi\psi - \psi^2, \text{ αν } 2\chi + \psi = 6.$$

7) Αν $\chi = \frac{2}{\psi}$ να δείξετε ότι $(3\chi + \psi)^2 - (3\chi - \psi) \cdot (3\chi + \psi) - 2\psi(\psi - 3\chi) = 24$

Γ) Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες:

i) $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$

ii) $2(\alpha - \beta)^2 + 2(\alpha + \beta)^2 = (2\alpha + 2\beta)^2 - 8\alpha\beta$

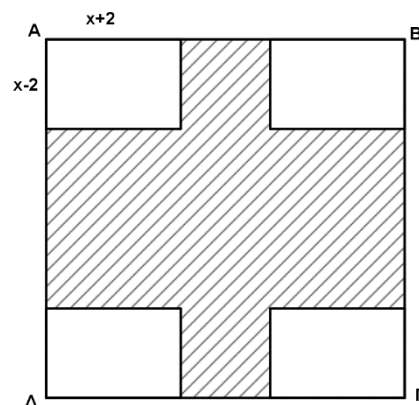
iii) $\left(\frac{3\alpha + \beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{3\alpha - \beta}{2}\right)^2 = 3\alpha\beta$

iv) $(3\alpha - 2)^2 - (2\alpha - 3)^2 = 5(\alpha - 1)(\alpha + 1)$

Δ) Να αποδείξετε ότι η παράσταση:

$$A = (x - 2y)^2 - 5(x + y)(x - y) + (2x + y)^2 \text{ είναι σταθερή (ανεξάρτητη της μεταβλητής } x).$$

Ε) Στο πιο κάτω σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς $3\chi + 4$ και τα τέσσερα ορθογώνια είναι ίσα με διαστάσεις $\chi + 2$ και $\chi - 2$. Να βρείτε την αλγεβρική παράσταση που εκφράζει το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας.



ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ - ΡΗΤΕΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ

ΚΟΙΝΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ από όλους τους όρους

ΔΙΩΝΥΜΑ (2 ΟΡΟΙ)	ΤΡΙΩΝΥΜΑ (3 ΟΡΟΙ)	ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΜΕ 4 ΟΡΟΥΣ	ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΜΕ 5 ΟΡΟΥΣ
<p>➤ Διαφορά δύο τετραγώνων</p> $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha + \beta)$	<p>➤ Τέλειο Τετράγωνο</p> <p>➤ Τριώνυμο της μορφής</p> $\chi^2 + \beta\chi + \gamma$	<p>Χωρίζω σε ομάδες</p> <p>➤ Δύο – Δύο</p> <p>➤ Τρεις με ένα</p> <p>Οι τρεις τέλειο τετράγωνο και ο άλλος τετράγωνο και στο τέλος διαφορά τετραγώνων</p>	<p>Χωρίζω σε ομάδες:</p> <p>➤ Τρεις με δύο</p>
			<p>ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΜΕ 6 ΟΡΟΥΣ</p> <p>Χωρίζω σε ομάδες:</p> <p>➤ Τρεις με τρεις</p> <p>➤ Δύο – Δύο - Δύο</p>

A) Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο παραγόντων τα πολυώνυμα.

1) $\chi^3 + 7\chi^2 =$

2) $5\chi\psi^3 + 15\chi^2\psi^2 =$

3) $4\alpha^2 - 9 =$

4) $\beta^2 - 64 =$

5) $\psi^2 - 6\psi + 8 =$

6) $9\chi^2 + 12\chi + 4 =$

7) $\chi^2 - 4\chi - 12 =$

8) $\chi^3 - 16\chi =$

9) $\alpha\chi + \alpha\psi + 3\chi + 3\psi =$

10) $\alpha^2 + 2\alpha^2 + \alpha =$

11) $7\alpha^3 - 28\alpha =$

12) $\chi^3 + 8\chi^2 - 9\chi =$

13) $(2\chi - 1)^2 - \psi^2 =$

14) $\alpha^2 - \beta^2 - 4\alpha + 4\beta =$

15) $\chi^2(\chi - 3) + 4(3 - \chi) =$

16) $-\chi^2 + 2\chi + 8 =$

17) $\chi^5 - \chi =$

18) $4\chi^2 - 4\chi + 1 - \psi^2 =$

19) $\chi^2 - 4\chi + 3 - \alpha\chi + \alpha =$

20) $\chi^2 - \alpha\chi - 3\chi - \alpha - 4 =$

B) ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ου} ή ανωτέρου βαθμού

Τρόποι επίλυσης

- Με παραγοντοποίηση
 - ❖ Μεταφέρω όλους τους όρους της εξίσωσης στο α' μέλος ώστε το β' μέλος = 0
 - ❖ Εκτελώ όλες τις δυνατές πράξεις και μετά παραγοντοποιώ το α' μέλος της εξίσωσης.
 - ❖ Μηδενίζω κάθε παράγοντα και βρίσκω τις λύσεις της εξίσωσης.

1) Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

α) $(2x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) = 0$

β) $x^2 - 5x - 6 = 0$

γ) $x^3 = 25x$

δ) $x^2 - 4x = -4$

ε) $3x^2 + 18x + 27 = 0$

στ) $x^3 - 8x^2 = 9x$

ζ) $\psi(\psi + 6) = -9$

η) $(x + 2) \cdot (x + 3) = 20$

θ) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

ι) $2(x + 3)^2 - 8 = 0$

2) Να λύσετε τα πιο κάτω προβλήματα με χρήση εξίσωσης.

α) Το άθροισμα των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακέραιων αριθμών είναι ίσο με 61.
Να βρείτε τους αριθμούς.

β) Στην πιο κάτω φωτογραφία φαίνεται μια μεγάλη βιτρίνα καταστήματος. Η βιτρίνα έχει σχήμα ορθογώνιο και εμβαδόν 24m^2 . Το πλάτος της είναι κατά 1m μικρότερο από το τριπλάσιο του μήκους της. Να βρείτε:

i) Τις διαστάσεις της βιτρίνας.

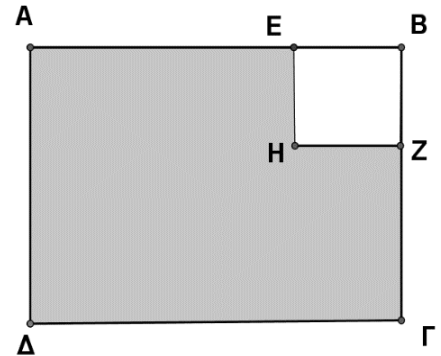
ii) Ο καταστηματάρχης θα τοποθετήσει χριστουγεννιάτικη γιρλάνδα στην περίμετρο της βιτρίνας. Αν κάθε κομμάτι γιρλάνδας είναι 5,5m, πόσα τέτοια κομμάτια θα χρειαστεί;



γ) Στο πιο κάτω σχήμα, το EBZH είναι τετράγωνο πλευράς x m, το ABΓΔ είναι ορθογώνιο με

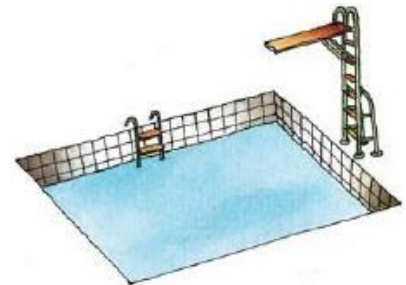
$$AE = (2x+3) \text{ m και } ZΓ = (x+3) \text{ m.}$$

Να βρείτε, τις διαστάσεις του ορθογωνίου ABΓΔ, αν το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας είναι ίσο με 209 m^2 .



δ) Πισίνα σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου έχει εμβαδόν βάσης 60 m^2 .

Αν το πλάτος της βάσης είναι κατά 11 m μικρότερο από το μήκος της, να βρείτε την περίμετρο της πισίνας.



Γ) ΡΗΤΕΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

1) Να βρείτε για ποιες τιμές των μεταβλητών ορίζονται οι πιο κάτω παραστάσεις και να τις απλοποιήσετε.

$$\alpha) \frac{-9x^4 \psi^3 \omega}{-3x^2 \psi^2 \omega} =$$

$$\beta) \frac{5x^2 - 10x}{x^2 - 3x + 2} =$$

$$\gamma) \frac{x^2 + x - 12}{2x^2 + 8x} =$$

2) Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) \frac{2}{x-5} + \frac{2}{2x+10} =$$

$$\beta) \frac{x}{x^2+2x} - \frac{2}{2-x} - \frac{4x}{x^2-4} =$$

$$\gamma) \frac{x^2+x-2}{4-x^2} \cdot \frac{2x-4}{x^2-1} =$$

$$\delta) \frac{3x^3-6x^2}{x^2-4x+4} \cdot \frac{x^2-5x+6}{x^4-9x^2} =$$

$$\epsilon) \frac{x^2-4x-5}{x^3-x} : \frac{x^2-25}{7x} =$$

$$\sigma\tau) \frac{6a^2-6a}{a^2-2a+1} : \frac{5a^2+5a}{a^2+2a+1} =$$

$$\zeta) \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x^2-5x+6} \right) : \frac{x^2}{x^2-2x} =$$

$$\eta) \left(\frac{x}{x^2+2x} + \frac{2}{2-x} + \frac{4x}{x^2-4} \right) : \frac{3}{x^2+3x+2} =$$

$$\theta) \frac{3x^2-3}{x^3+x^2-2x} : \left(\frac{3}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} \right) =$$

$$\iota) \frac{x^3-x}{x^2-4x+3} : \left(\frac{1}{3+x} + \frac{2-2x}{x^2-9} \right) =$$

$$\kappa) \left(\frac{x^2}{x-3} + \frac{3x^2}{x^2-6x+9} \right) : \left(\frac{2x^2}{x^2-9} - \frac{x}{x+3} \right) =$$

$$\lambda) \frac{3}{x-3} - \frac{3}{x^2-9} \div \frac{x^2-2x}{x^2+3x} =$$

$$\mu) \frac{1 + \frac{9}{x^2-9}}{x + \frac{x}{x-3}} =$$

$$\nu) \frac{x - \frac{9}{x}}{x-5 + \frac{6}{x}} =$$

$$\xi) \frac{\frac{x^2-16}{x^2+3x-4}}{\frac{x^2-4x}{x^2}} =$$

3) Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{4x^2+4x+7}{x^2-3x+2} + \frac{3}{2-x} = \frac{3x+2}{x-1}$$

$$\beta) \frac{x}{3-x} - 1 + \frac{7}{3+x} = \frac{28}{9-x^2}$$

$$\gamma) \frac{x-1}{x^2-4} + \frac{5}{x^2+2x} = \frac{1}{x-2}$$

$$\delta) \frac{4x+4}{x^2+2x-15} + \frac{2}{3-x} = \frac{x+4}{x^2+5x}$$

4) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{x^6-x^4}{x^3-x^2} \cdot \frac{1}{x^2+x}$, αν $x = 2024$.

5) Αν $A = \frac{x-3y}{x^2-6xy+9y^2}$ και $B = \frac{x^2+9y^2}{x^4-81y^4}$, όπου $x \neq 3y$ και $x \neq -3y$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{A}{B} = x + 3y$.

β) Αν $x - 3y = 5$ και $x^2 - 9y^2 = 15$ να βρείτε την αριθμητική τιμή του $\frac{A}{B}$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 3: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

- 1) Σε ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ ($AB = AΓ$), τα Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $AΓ$ αντίστοιχα. Πάνω στις προεκτάσεις της $BΓ$ προς B και Γ παίρνουμε τμήματα $BZ = \Gamma P$.
Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $B\Delta P$ και $\Gamma E Z$ είναι ίσα.
- 2) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ ($AB = BΓ$). Να προεκτείνετε την βάση $AΓ$ προς το A και Γ κατά ίσα τμήματα $A\Delta = \Gamma E$. Να δείξετε ότι τα σημεία Δ και E ισαπέχουν από τις πλευρές AB και $BΓ$ αντίστοιχα.
- 3) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ με $AB = AΓ$ και $A\Delta$ διχοτόμος του τριγώνου.
Να φέρετε τις αποστάσεις ΔE και ΔZ του σημείου Δ από τις πλευρές AB και $AΓ$ αντιστοίχως.
Να δείξετε ότι:
α) $\Delta E = \Delta Z$
β) Το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές.
- 4) Σε ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ ($AB = AΓ$), Δ και E είναι σημεία των πλευρών AB και $AΓ$ αντίστοιχα έτσι ώστε $A\Delta = AE$. Αν Z είναι το μέσο της $BΓ$ να δείξετε ότι:
α) $\Delta Z = EZ$
β) Οι αποστάσεις των σημείων Δ και E από τις πλευρές $AΓ$ και AB αντίστοιχα είναι ίσες.
- 5) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ ($AB = AΓ$) και $A\Delta$ διχοτόμος του τριγώνου.
Προεκτείνουμε τις πλευρές AB και $AΓ$ κατά ίσα τμήματα BE και ΓZ αντίστοιχα.
Να δείξετε ότι:
α) $E\Delta Z$ ισοσκελές τρίγωνο. β) Οι αποστάσεις των E και Z από την $BΓ$ είναι ίσες.
- 6) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ ($AB = AΓ$). Προεκτείνουμε τη βάση $BΓ$ προς το B και Γ κατά ίσα τμήματα $B\Delta$ και ΓE αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές
β) Τα σημεία B και Γ απέχουν ίσες αποστάσεις από τις πλευρές $A\Delta$ και AE αντίστοιχα.
- 7) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ ($AB = AΓ$), Δ είναι το μέσο της AB και E το μέσο της $AΓ$.
Από τα Δ και E φέρουμε τις αποστάσεις ΔZ και $E H$ πάνω στη $BΓ$. Να δείξετε ότι:
α) $\Delta Z = E H$
β) Το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές.
- 8) Σε ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ ($AB = AΓ$) προεκτείνουμε τις πλευρές AB και $AΓ$ προς το B και Γ αντίστοιχα, κατά τμήματα $B\Delta = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις των σημείων Δ και E από τη βάση $BΓ$ του τριγώνου είναι ίσες .

ΕΝΟΤΗΤΑ 5: ΕΥΘΕΙΑ - ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1. Αν δίνονται τα σημεία $A(x_1, \psi_1)$ και $B(x_2, \psi_2)$:

α) Μήκος ευθύγραμμου τμήματος AB: $(AB) = \sqrt{(\psi_2 - \psi_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$

β) Συντεταγμένες μέσου M ευθυγράμμου τμήματος AB: $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $\psi_M = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2}$

2. α) Οι ευθείες με τύπο $\psi = \alpha x + \beta$ και $\psi = \alpha x$ έχουν κλίση $\lambda = \alpha$.

β) Η κλίση της ευθείας με τύπο $x = \kappa$ ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ.

γ) Η κλίση της ευθείας με τύπο $\psi = \beta$ είναι $\lambda = 0$.

δ) Η ευθεία που περνά από τα σημεία $A(x_1, \psi_1)$ και $B(x_2, \psi_2)$ έχει κλίση: $\lambda_{AB} = \frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{\psi_2 - \psi_1}{x_2 - x_1}$.

3. Σχετικές θέσεις δύο ευθειών:

Έστω οι ευθείες: $\epsilon_1: \psi = \lambda_1 x + \beta_1$ και $\epsilon_2: \psi = \lambda_2 x + \beta_2$ τότε ισχύει ότι:

- Τεμνόμενες Ευθείες : $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Leftrightarrow \epsilon_1, \epsilon_2$ τέμνονται

Κάθετες ευθείες: $\text{Αν } \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \Leftrightarrow \epsilon_1 \perp \epsilon_2$

- Παράλληλες Ευθείες: $\lambda_1 = \lambda_2$ και $\beta_1 \neq \beta_2 \Leftrightarrow \epsilon_1 \parallel \epsilon_2$

- Ευθείες που συμπίπτουν (ταυτίζονται): $\lambda_1 = \lambda_2$ και $\beta_1 = \beta_2 \Leftrightarrow \epsilon_1, \epsilon_2$ συμπίπτουν

Αν έχουμε σύστημα δυο εξισώσεων με δύο αγνώστους:

α) Το σύστημα έχει μια μοναδική λύση εάν οι ευθείες τέμνονται.

β) Το σύστημα δεν έχει λύση (αδύνατο) εάν οι ευθείες είναι παράλληλες.

γ) Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις εάν οι ευθείες συμπίπτουν.

1. Δίνονται τα σημεία $A(2, -1)$ και $B(-3, 4)$. Να βρείτε:
- Το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB .
 - Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB .
 - Την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος AB .
2. Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων A και B , το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB και τη κλίση του στις πιο κάτω περιπτώσεις:
- $A(3, 5)$ και $B(-4, 5)$
 - $A(-3, -1)$ και $B(-6, 3)$
3. Να βρείτε τις συντεταγμένες του άκρου A ενός ευθυγράμμου τμήματος AB που έχει άκρο $B(8, -5)$ και μέσο $M(6, -2)$.
4. Να βρείτε τις δυνατές τιμές του μ , αν η απόσταση των σημείων με συντεταγμένες $(6, 2)$ και $(-3, \mu)$ είναι $\sqrt{106}$.
5. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ που:
- περνά από το σημείο $A(2, -3)$ και έχει κλίση $\lambda=4$.
 - περνά από τα σημεία $B(6, -1)$ και $\Gamma(3, 2)$.
 - περνά από το σημείο $\Delta(3, -6)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία $3\chi - \psi = 5$.
 - περνά από το σημείο $E(-5, 8)$ και είναι κάθετη με την ευθεία $5\chi - 3\psi = 17$.
 - περνά από το σημείο $Z(-2, 1)$ και από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος των σημείων $A(2, -1)$ και $B(-3, 4)$.
 - περνά από το σημείο $\Theta(3, -6)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία $\psi = 5$.
 - περνά από το σημείο $K(-9, 19)$ και είναι κάθετη με την ευθεία $\chi = 45$.
6. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ που περνά από το σημείο $A(-4, 1)$ και είναι κάθετη με την ευθεία:
- $\epsilon_1: \psi = 3\chi - 1$
 - $\epsilon_2: 2\chi + \psi = 3$
 - $\epsilon_3: \chi = 3$
 - $\epsilon_4: \psi = 2$
7. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ που περνά από το σημείο A και είναι παράλληλη με την ευθεία ϵ_1 στις πιο κάτω περιπτώσεις.

A) $A(0, 0)$

$\epsilon_1: \chi + 2\psi = 4$

B) $A(-2, 4)$

$\epsilon_1: 6\chi - 4\psi = 5$

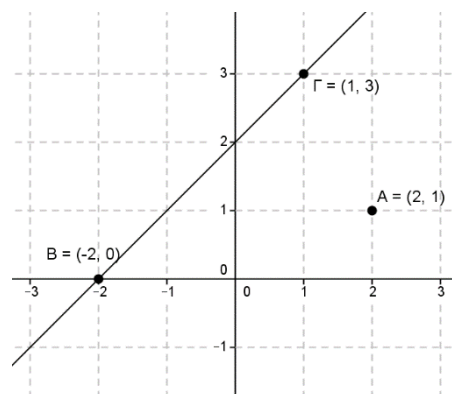
E)

Γ) $A(8, -3)$

$\epsilon_1: \chi = 67$

Δ) $A(0, -3)$

$\epsilon_1: \psi = -12$



8. Να βρείτε την τιμή του α ώστε οι ευθείες $\epsilon_1: (\alpha - 2)\chi + 3\psi = 1$ και $\epsilon_2: \psi = -\frac{2}{3}\chi$ να είναι παράλληλες.

9. Αν η ευθεία $\varepsilon_1: \psi = (\beta - 1)\chi + 7$ είναι παράλληλη με την ευθεία $\varepsilon_2: 2\chi - \psi = -3$ να βρείτε το β .

10. Να βρείτε την τιμή του κ , ώστε η ευθεία $\varepsilon_1: \psi = (\kappa - 1)\chi - 3$ να είναι κάθετη με την ευθεία

$$\varepsilon_2: 2\chi + \psi = 1.$$

11. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραμέτρων κ και λ , ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1: \psi = (3\kappa + 5)\chi - 14$ και $\varepsilon_2: \psi - 4\chi = 7\lambda$ να ταυτίζονται.

12. Αν οι ευθείες $\varepsilon_1: \psi = (\kappa - 3)\chi + \left(\frac{2\kappa + \mu}{2}\right)$ και $\varepsilon_2: (4\kappa + 6)\chi - \psi = 5$ συμπίπτουν (ταυτίζονται), να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων κ και μ .

13. Να βρείτε τη σχετική θέση των ευθειών ε_1 και ε_2 στις πιο κάτω περιπτώσεις χωρίς να λύσετε τα συστήματα. Σε κάθε περίπτωση να εξετάσετε το πλήθος των λύσεων. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

$$\varepsilon_1: 3\chi + 6\psi = 4$$

$$\varepsilon_1: \psi = 4 - \frac{1}{2}\chi$$

$$\varepsilon_1: \psi = 4\chi - 5$$

$$\varepsilon_2: -3\chi + 6\psi = 8$$

$$\varepsilon_2: 2\chi + 4\psi - 8 = 0$$

$$\varepsilon_2: 12\chi = 3\psi + 15$$

$$\varepsilon_1: \psi = 4$$

$$\varepsilon_1: \chi = -1$$

$$\varepsilon_1: \chi = -8$$

$$\varepsilon_2: \psi = -1$$

$$\varepsilon_2: \chi = 7$$

$$\varepsilon_2: \psi = 15$$

14. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών $\varepsilon_1: 3\chi = 2\psi + 12$ και

$$\varepsilon_2: 3\psi + \chi = -7.$$

15. Αν το σύστημα $\varepsilon_1: 2\chi + 3\psi = 7$
 $\varepsilon_2: \psi = \alpha\chi + 1$ δεν έχει λύση, να βρείτε την τιμή του α .

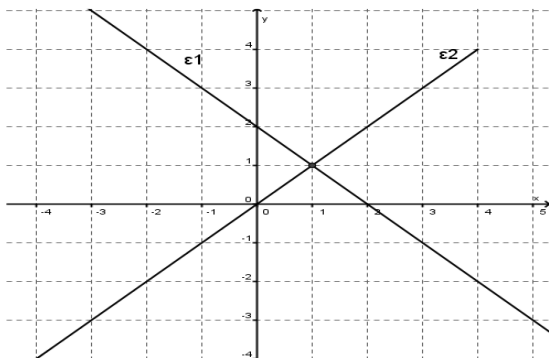
16. Αν το σύστημα $\psi = (2\alpha - 5\beta)\chi - 15$
 $3\chi + \psi = 3\beta - 4\alpha$ έχει άπειρες λύσεις, να βρείτε τις τιμές των α και β .

17. Η ευθεία ε_1 περνά από τα σημεία $A(1, 0)$, $B(-3, 1)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon_2: (\alpha + 2)\psi = (\alpha + 1)\chi + 4$. Να βρείτε την τιμή του α .

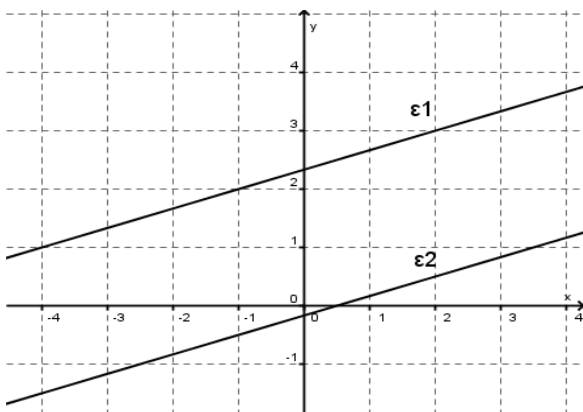
18. Να αντιστοιχίσετε τις γραφικές παραστάσεις της στήλης Α με το αντίστοιχο σύστημα εξισώσεων της στήλης Β.

ΣΤΗΛΗ Α

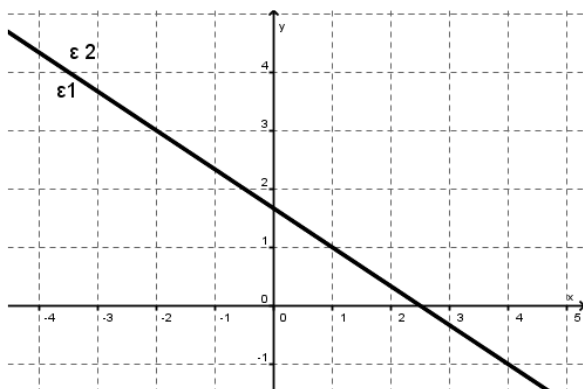
1)



2)



3)



ΣΤΗΛΗ Β

A. $\begin{cases} \chi - 5\psi = 7 \\ \chi + 3\psi = -2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} \chi - \psi = 0 \\ \chi + \psi = 2 \end{cases}$

Γ. $\begin{cases} \psi = -\frac{2}{3}\chi + \frac{5}{3} \\ \psi = -\frac{4}{6}\chi + \frac{10}{6} \end{cases}$

Δ. $\begin{cases} \psi = \frac{1}{2}\chi + 15 \\ \psi = \frac{1}{2}\chi - 20 \end{cases}$

Ε. $\begin{cases} \psi = \frac{\chi}{3} + \frac{7}{3} \\ \psi = \frac{\chi}{3} - \frac{1}{6} \end{cases}$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΣΤΗΛΗ Α	1	2	3
ΣΤΗΛΗ Β			

19. Να λύσετε τα πιο κάτω συστήματα:

α)
$$\begin{cases} 3\chi - \psi = 12 \\ 2\chi + 3\psi = 19 \end{cases}$$

β)
$$\begin{cases} 2\alpha - 3\beta = -6 \\ \alpha - 2\beta = -5 \end{cases}$$

γ)
$$\psi - \chi + 2(2\chi - \psi) = 4$$

δ)
$$3(\psi + 2) - 4(\chi - 3) = 3$$

$$\frac{\psi + \chi}{3} - \frac{2\psi - \chi}{2} = -\frac{5}{6}$$

$$\frac{\chi - 1}{5} - \frac{\psi + 5}{2} = -3$$

20. Δίνεται τρίγωνο ABE, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

α) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές του.

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

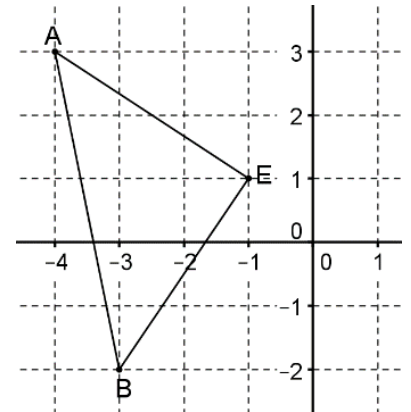
γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθυγράμμου τμήματος AB.

δ) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου EM.

ε) Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου ABE.

στ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το B και είναι παράλληλη με AE.

ζ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το A και είναι κάθετη με την AB.



ΝΑ ΛΥΣΕΤΕ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

21. Σε μια κατασκήνωση υπάρχουν 260 παιδιά, τα οποία μένουν σε 50 σκηνές των 4 ατόμων και 6 ατόμων. Αν όλες οι σκηνές είναι γεμάτες, να βρείτε πόσες είναι οι σκηνές των 4 ατόμων και 6 ατόμων.

22. Ο κερματοδέκτης ενός μηχανήματος πώλησης αναψυκτικών δέχεται κέρματα του ενός ευρώ και δύο ευρώ. Όταν ανοίχτηκε, διαπιστώθηκε ότι περιείχε 80 κέρματα συνολικής αξίας 95 ευρώ. Πόσα κέρματα από κάθε είδος υπήρχαν;

23. Ο Γιώργος και ο Μάρκος έχουν μαζί €430. Αν ο Γιώργος ξοδέψει €30 για την αγορά ενός παιχνιδιού και ο Μάρκος πάρει δώρο από τη θεία του €50, τότε ο Μάρκος θα έχει διπλάσια χρήματα από τον Γιώργο. Πόσα χρήματα είχαν αρχικά ο Γιώργος και ο Μάρκος;

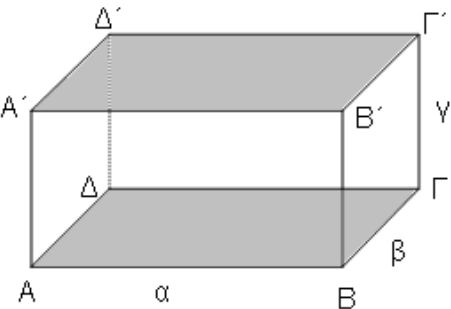
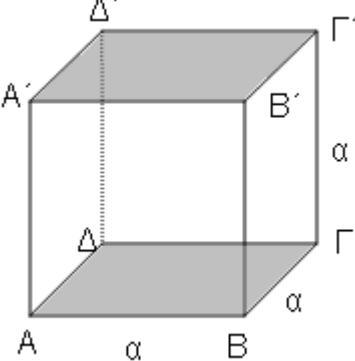

24. Σε μία αυλή υπάρχουν κόττες, κουνέλια και ένας σκύλος. Πόσα είναι τα κουνέλια και πόσες οι κόττες αν έχουν συνολικά 21 κεφάλια και 56 πόδια.

25. Στη θεατρική παράσταση του Γυμνασίου Βεργίνας παρευρέθηκαν 200 άτομα, ενήλικες και παιδιά. Το εισιτήριο εισόδου για τους ενήλικες στοίχιζε €4 ενώ για τα παιδιά €3. Αν συνολικά εισπράχθηκαν €780, να βρείτε πόσοι ενήλικες και πόσα παιδιά παρακολούθησαν την παράσταση;

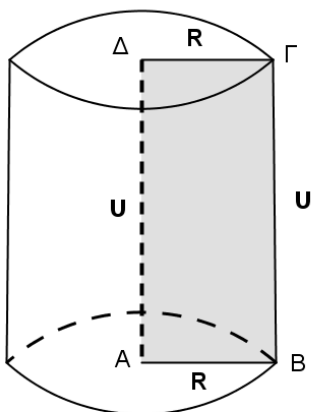
26. Ο Κώστας αγόρασε 2 κιλά μήλα και 3 κιλά πορτοκάλια και πλήρωσε € 3,45. Ο Αντρέας αγόρασε 3 κιλά μήλα και 2 κιλά πορτοκάλια και πλήρωσε €4,30 . Πόσα το κιλό είναι τα μήλα και πόσα τα πορτοκάλια;

27. Σ'ένα τηλεοπτικό παιχνίδι σε κάθε παίκτη υποβάλλονται 10 ερωτήσεις. Για κάθε σωστή απάντηση προστίθενται βαθμοί ενώ για κάθε λανθασμένη απάντηση αφαιρούνται βαθμοί. Ένας παίκτης έδωσε 7 σωστές απαντήσεις και συγκέντρωσε 64 βαθμούς, ενώ ένας άλλος έδωσε 4 σωστές απαντήσεις και συγκέντρωσε 28 βαθμούς. Πόσους βαθμούς παίρνει ένας παίκτης για κάθε σωστή απάντηση και πόσοι βαθμοί του αφαιρούνται για κάθε λανθασμένη απάντηση;

ΕΝΟΤΗΤΑ 7: ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

<p>ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟ</p> 	<p>◊ <u>Εμβαδό Ολικής επιφάνειας</u></p> $E_{ολ.} = 2 \cdot (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$ <p>◊ <u>Όγκος</u> $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$</p> <p>◊ <u>Διαγώνιος Κύβου</u> $\delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$</p>
<p>ΚΥΒΟΣ</p> 	<p>◊ <u>Εμβαδό Ολικής επιφάνειας Κύβου</u></p> $E_{ολ.} = 6 \cdot \alpha^2 \quad \text{όπου } \alpha: \text{ ακμή του κύβου}$ <p>◊ <u>Όγκος Κύβου</u> $V = \alpha^3$</p> <p>◊ <u>Διαγώνιος Κύβου</u> $V = \alpha \sqrt{3}$</p>
<p>ΚΥΚΛΟΣ</p> 	<p><u>Μήκος (ή Περιφέρεια) κύκλου (Γ)</u></p> $\Gamma = 2\pi R$ <p><u>Εμβαδόν κύκλου (Ε)</u></p> $E = \pi R^2$ <p>R : ακτίνα κύκλου</p>

ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ



◇ Εμβαδό Κυρτής επιφάνειας (E_k)

$$E_k = 2\pi R u$$

◇ Εμβαδό Ολικής επιφάνειας

$$E_{ολ.} = E_k + 2E_\beta$$

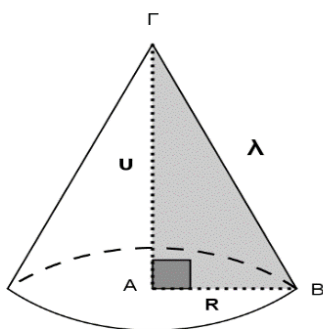
◇ Όγκος Κυλίνδρου

$$V = \pi R^2 u$$

$u \Rightarrow$ ύψος κυλίνδρου

$R \Rightarrow$ ακτίνα βάσης κυλίνδρου

ΚΩΝΟΣ



$u \Rightarrow$ ύψος κώνου

$R \Rightarrow$ ακτίνα βάσης κώνου

$\lambda \Rightarrow$ γενέτειρα κώνου

◇ Εμβαδό Κυρτής επιφάνειας (E_k)

$$E_k = \pi R \lambda$$

◇ Εμβαδό Ολικής επιφάνειας

$$E_{ολ.} = E_k + E_\beta \quad \text{ή} \quad E_{ολ.} = \pi R \lambda + \pi R^2$$

◇ Όγκος Κώνου

$$V = \frac{\pi R^2 u}{3}$$

- 1) Να βρείτε το εμβαδό ολικής, τον όγκο και τη διαγώνιο ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου που έχει διαστάσεις 3m, 5m, 2m.
- 2) Να βρείτε τον όγκο, το εμβαδό ολικής επιφάνειας και τη διαγώνιο κύβου με ακμή ίση με 3m.
- 3) Να βρεθεί ο όγκος του κύβου του οποίου το εμβαδόν ολικής επιφάνειας είναι 96 m^2 .
- 4) Κύβος έχει όγκο $V = 27 \text{ cm}^3$. Να βρείτε την ολική του επιφάνεια.
- 5) Θέλουμε να βάψουμε τους τοίχους ενός δωματίου που έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις: πλάτος 4 m, μήκος 5 m και ύψος 3 m. Πόσα κιλά χρώμα πρέπει να αγοράσουμε, αν είναι γνωστό ότι ένα κιλό χρώματος καλύπτει περίπου 9 m^2 ;

6) Τριγωνικό πρίσμα έχει βάση ορθογώνιο τρίγωνο με μια κάθετη πλευρά 6 cm και υποτεινούσα 10 cm. Το ύψος του πρίσματος είναι ίσο με την περίμετρο της βάσης. Να βρείτε το εμβαδό της ολικής επιφάνειάς του και τον όγκο του.

7) Μια κλειστή δεξαμενή καυσίμων έχει σχήμα τετραγωνικού πρίσματος. Η περίμετρος της βάσης της είναι 16m και το ύψος της κατά 1m μεγαλύτερο από την ακμή της βάσης της .



α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της δεξαμενής.

β) Πόσες ώρες θα χρειαστούν για να γεμίσει η δεξαμενή, όταν η παροχή που διοχετεύει τα καύσιμα στη δεξαμενή έχει ροή 4m^3 την ώρα;

8) Να βρείτε τον όγκο, το εμβαδό ολικής επιφάνειας κυλίνδρου που έχει διάμετρο βάσης 20cm και ύψος διπλάσιο της ακτίνας του.

9) Μια κλειστή δεξαμενή αποθήκευσης καυσίμων έχει σχήμα κυλίνδρου με ύψος 20 m και ακτίνα βάσης $\rho = 30$ m. Είναι κατασκευασμένη από ειδική λαμαρίνα που κοστίζει 5 € το τετραγωνικό μέτρο. Ποιο είναι το κόστος της λαμαρίνας για την κατασκευή της δεξαμενής;

10) Ένας κύλινδρος έχει όγκο ίσο με 96π m^3 και ύψος 6m. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ολικής επιφάνειας του.

11) Το εμβαδόν κυρτής επιφάνειας κυλίνδρου είναι 40π m^2 και το ύψος του 4 m . Να βρεθούν :
(α) η ακτίνα της βάσης του (β) το εμβαδόν ολικής επιφάνειάς του (γ) ο όγκος του.

12) Κώνος έχει ακτίνα $R= 8\text{cm}$ και $u = 6$ cm .Να βρεθούν:

α) η γενέτειρα λ

β) το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας E_k

γ) τον όγκο V

13) Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδό ολικής επιφάνειας κώνου που έχει περίμετρο βάσης 10πcm και γενέτειρα 13cm.

14) Κώνος έχει εμβαδόν ολικής επιφάνειας $144\pi\text{m}^2$ και εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $80\pi\text{m}^2$.

Να βρεθούν: α) η ακτίνα (R)

β) το ύψος (u)

γ) η γενέτειρα (λ)

δ) ο όγκος του κώνου.

15) Κώνος έχει $E_k=60\pi$ m^2 και $R=6\text{m}$. Να βρεθεί ο όγκος του.

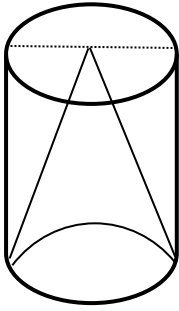
16) Το εμβαδόν της βάσης κώνου είναι $28,26\text{m}^2$ και το $\lambda = 5\text{m}$. Να βρεθούν

α) η ακτίνα R

β) το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας $E_{ολ}$

γ) τον όγκο του V

17)

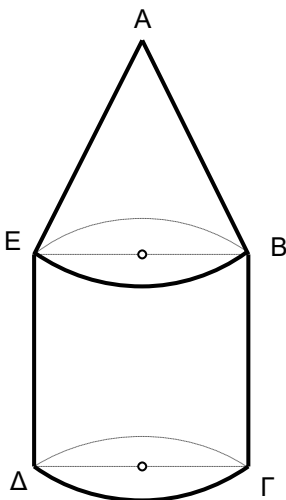


Αν το ύψος του κυλίνδρου είναι 12 dm και η ακτίνα της βάσης του 5 dm βρείτε:
α) τον όγκο του στερεού
β) την E_k του κώνου.

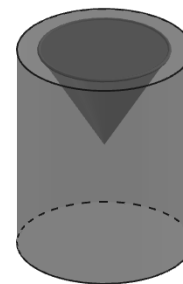
18) Στο πιο κάτω σχήμα το ύψος του κυλίνδρου είναι διπλάσιο από το ύψος του κάθε κώνου (οι κώνοι είναι οι ίδιοι). Η γενέτειρα του κάθε κώνου είναι $\lambda = 13\text{cm}$ και η ακτίνα της βάσης $R = 5\text{cm}$. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού και τον όγκο του.



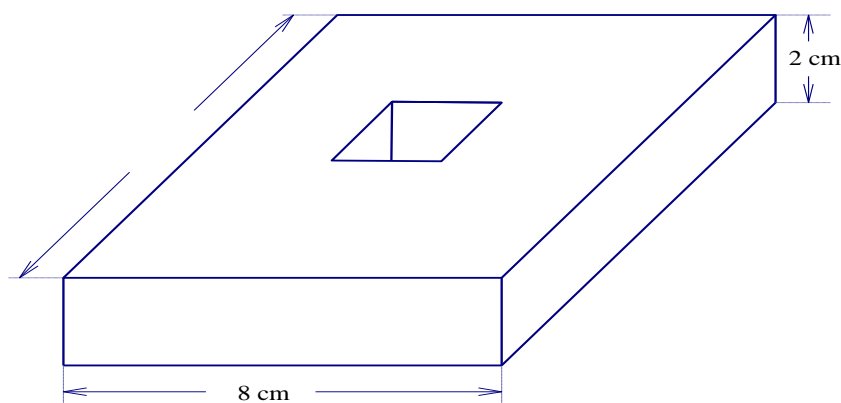
19) Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύλινδρος με εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $48\pi\text{ cm}^2$ και ακτίνα βάσης 4cm. Αν ο κώνος έχει γενέτειρα $\lambda = 5\text{ cm}$, να βρεθεί ο όγκος του στερεού.



20) Το πιο κάτω στερεό αποτελείται από ένα κύλινδρο από τον οποίο έχει αφαιρεθεί ένας κώνος. Ο κύλινδρος έχει ακτίνα βάσης $R = 7\text{m}$ και εμβαδό κυρτής επιφάνειας $224\pi\text{ cm}^2$. Ο κώνος έχει ακτίνα βάσης $\rho = 6\text{m}$ και ύψος ίσο με το $\frac{1}{2}$ του ύψους του κυλίνδρου. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού.

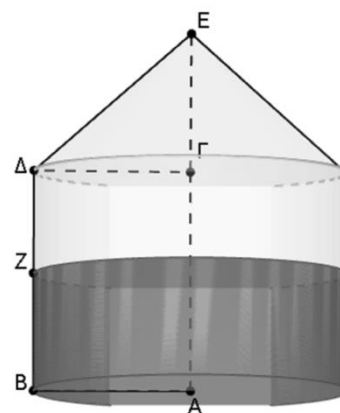


21) Σε μια ξύλινη κατασκευή ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου βγάλαμε μια τρύπα σχήματος κύβου όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν ολικής επιφάνειας του στερεού που προκύπτει.

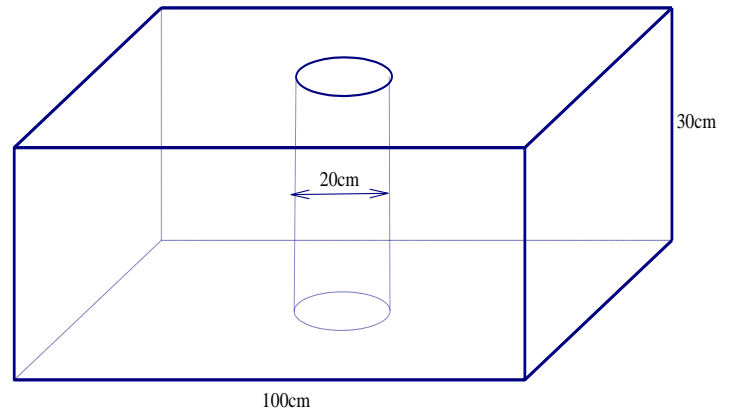


22) Το πιο κάτω σχήμα δείχνει μια κυλινδρική δεξαμενή νερού της οποίας η στέγη είναι κώνος. Η ακτίνα της βάσης της δεξαμενής είναι 8m . Η δεξαμενή περιέχει νερό που φτάνει σε ύψος $BZ=5\text{m}$. Αν το ύψος του κυλίνδρου είναι $BD=10\text{m}$ και η γενέτειρα του κώνου $\Delta E=10\text{m}$, να υπολογίσετε:

- Πόσα κυβικά μέτρα νερού πρέπει να προσθέσουμε έτσι ώστε να γεμίσει η δεξαμενή μέχρι την κορυφή E ; (Η απάντηση σας μπορεί να δοθεί συναρτήσει του π .)
- Θέλουμε να βάψουμε την εξωτερική επιφάνεια της δεξαμενής (όχι το δάπεδο) με μπογιά που κοστίζει $\text{€}2,50$ το τετραγωνικό μέτρο. Πόσο θα κοστίσει συνολικά το βάψιμο της δεξαμενής;



23) Σε ξύλο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου βγάλαμε μια τρύπα σε σχήμα κυλίνδρου όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που προκύπτει.



ΚΑΛΟ ΔΙΑΒΑΣΜΑ

(Στις παρενθέσεις δίνονται οι απαντήσεις)

- 1) Πόσες έδρες έχει: α) ένας κύβος (6)
β) ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο (6)
γ) ένα πενταγωνικό πρίσμα (7)
δ) ένα οκταγωνικό πρίσμα (10)
ε) ένα πρίσμα που έχει 10 κορυφές; (12)
- 2) Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός εδρών που μπορεί να έχει ένα πρίσμα; (5)
- 3) Πόσες κορυφές έχει ένας κύβος; (8)
- 4) Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός κορυφών που μπορεί να έχει ένα πρίσμα; (6)
- 5) Πόσες ακμές έχει: α) ένα τριγωνικό πρίσμα (9)
β) ένα πρίσμα που οι βάσεις του είναι πεντάγωνα; (15)
- 6) Πόσες διαγώνιες έχει: α) ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο (4)
β) ένα τριγωνικό πρίσμα; (0)